On conjugacy classes of maximal tori in classical groups (古典群の極大トーラスの共役類について)

著者	刈山 和俊
号	906
発行年	1989
URL	http://hdl.handle.net/10097/25047

氏名・(本籍)	刈山和俊（かりやま かずとし）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理第906号
学位授与年月日	平成元年3月10日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
最終学歴	昭和52年3月 広島大学大学院理学研究科 (修士課程）数学専攻修了
学位論文題目	On conjugacy classes of maximal tori in classical groups (古典群の極大トーラスの共役類について)
論文審査委員	(主査) 教授 堀田良之　教授 佐武一郎 教授 小田忠雄

論文目次

序

第1節　極大トーラスと対合的多元環

1.1　一般線型群，特殊線型群

1.2　シンプレクティック群，特殊直交群

第2節　分類

2.1　準備

2.2　特殊線型群

2.3　シンプレクティック群，C型特殊直交群

2.4　D型特殊直交群

論 文 内 容 要 旨

まえがき

完全体K上定義された簡約可能な連結代数群Gの極大トーラスのK上共役類を分類する問題を考察する。

もしKが代数的閉体ならば，Gのすべての極大トーラスは共役である。

しかしKが代数的閉体でなければ，分類は単純でない。実際，Kが実数体の場合，問題は，そのリー環におけるカルタン部分環のその随伴群による共役類の分類に置き換えられる。岩堀長慶と佐武一郎が初めてこの種の問題を考察した。その後，コスタントと杉浦光夫がこの問題を完全に解いた。正確には，彼らは半単純実リー環におけるカルタン部分環のその随伴群による共役類の不変量を与えた。

Kが有限体で，Gが簡約可能な連結代数群の場合，スプリンガーとスタインバーグが，Gの極大トーラスのK上共役類の不変量として，Kの代数的閉体のガロア群からある極大トーラスに関するGのワイル群に値をもつ1次元ガロア・コホモロジー集合の元をとれることを示した。

簡単な考察から，ブラウアー群が零の体Kにまでこの事実を拡張する事が出来る。

Kが標数0の非アルキメデス的局所体で，Gがシュバレー型代数群の場合，ジェラルダーンと刈山がある種の極大トーラスの共役類を分類した。

一般には，その分類問題を解くことはもっと困難である。この論文の目的は，完全体あるいは標数0の非アルキメデス的局所体K上の古典群について，その分類問題のある解答を与えることである。

以下，詳しく論文の内容を説明する。

なお，考える代数多様体，多元環およびそれらの準同型は，指定しない限りK上定義されているものとする。そして共役とはK上共役のこととする。

第1節　極大トーラスと対合的多元環

今後，Gが一般，特殊線型群の場合，Kを任意の完全体とし，Gがシンプレクティック群の場合，Kを標数が2でない完全体とする。そしてGが特殊直交群の場合，Kを標数0の非アルキメデス的局所体とする。WであるK自明な極大トーラスに関するGのワイル群を表す。

1.1と1.2をまとめて説明する。

群Gの各極大トーラスに対して，その中から有理的でかつ正則な元がとれ，そしてこの元の特性多項式より可換半単純多元環を得る。この対応より，Gの極大トーラスの共役類の集合から，各々Gについて次の可換半単純多元環の同型類の集合への全射を得る。

Gが階数n (n≧2)の一般，特殊線型群の場合，それらは階数nのすべての可換半単純多元環である。

Gが階数n(n≧2)のシンプレクティック群およびC型特殊直交群の場合，それらは階数2nのすべての対合的可換半単純多元環である。

Gが階段n(n≧4)のD型特殊直交群の場合，それらは階数2nの対合的可換半単純多元環のうち，それらを定義する多項式の1と－1での値の積が乗法群K*の2乗を法として－1のn乗に等しいものたちである。

特に，Gが一般線型群の場合，その写像はさらに全単射である。またGが一般，特殊線型群，シンプレクティック群そしてC型特殊直交群のとき，それらの多元環の同型類の集合と，Kの分離閉包のガロア群からGのワイル群Wに値をもつ1次元ガロア・コホモロジー集合との間に1対1対応が存在する。そしてGがD型特殊直交群のとき，そのガロア群からGのワイル群Wに値をもつ1次元ガロア・コホモロジー集合から，上の多元環の同型類の集合への全射を得る。この写像は完全に記述される。

第2節　分　類

2.1　準　備

1節の群Gの極大トーラスの共役類の集合から可換半単純多元環の同型類の集合への全射について，それらの多元環の各同型類のその写像による逆像と，対応するある極大トーラスの1次元ガロア・コホモロジー群を，Gのワイル群Wにおけるその同型類に対応する1コサイクル（1節の後半）の中心化群によって割った商集合との間に1対1対応が存在する。これは代数群のガロア・コホモロジーの理論を用いて示される。

このガロア・コホモロジー群とその商集合とを各Gについて詳しく調べ，この商集合の基数を求める。すなわち，群Gの極大トーラスの共役類の分類を1節の可換半単純多元環の同型類と，1節の全射の各逆像の基数とに還元するのである。したがって，一般線型群は既に分類されたことになる。以下，他の古典群についてそれらの基数を求める。

2.2　特殊線型群

任意の可換半単純多元環はKの分離拡大たちの直和に同型である。

定理1　1節の写像のもと，階数nのある可換半単純多元環Aに対応する特殊線型群Gの極大トーラスの共役類は，Aの各単純因子すなわちKの分離拡大体Lについて，乗法群L*のLからKへのノルム写像による像のすべてとε＝±1とによって生成される乗法群K*の部分群によるその乗法群K*の商群の基数に等しい。ここで，Gのワイル群WにおけるAの同型類に対応する1コサイクルの中心化群と，Aにおける各単純因子Lとの情報から，εは±1のいずれかが完全に定まる。

2.3　シンプレクティック群，C型特殊直交群

階数2nの対合的可換単純多元環は，K上n次分離拡大体Lの2つの直和であり，その対合は互換となるもの(自明)，あるいはK上2n次分離拡大体Fであり，その対合がFとKの中間体Eについて，Fの非自明的なE－内部自己同型であるもの（非自明）に同型である。

命題　1節の写像のもと，Kの分離拡大体FとEから与えられる非自明な対合的可換単純多元環Aに対応するシンプレクティック群GおよびC型特殊直交群Gの極大トーラス共役類の基数は，乗法群E^*を乗法群F^*のFからEへのノルム写像による像で割った商群を，さらにGのワイル群WにおけるAの同型類に対応する1コサイクルの中心化群の作用で割った商集合の基数に等しい。ここで，この中心化群とその商群上の作用は具体的に記述される。

一般の対合的可換半単純多元環は自明あるいは非自明な対合的可換単純多元環たちの直和に同型である。

定理2　1節の写像のもと，階数2nのある対合的可換半単純多元環Aに対応するシンプレクティック群GおよびC型特殊直交群Gの極大トーラスの共役類の基数は，Aの各非自明単純因子について，命題の基数をNとし，Aにおけるその単純因子に同型な単純因子(自分自身も含む)の個数をmとすると，N+m−1乗におけるm次の二項係数の，Aにおける非自明単純因子の同型類の代表系をすべてわたった積に等しい。

2.4　D型特殊直交群

D型ワイル群はC型ワイル群の指数2の部分群として埋め込まれることを注意しておく。

定理3　1節の写像のもと，1節の条件を満たす階数2nのある対合的可換半単純多元環Aに対応するD型特殊直交群Gの極大トーラスの共役類の基数は次のようにして与えられる。AにおけるKの分離拡大体FとEから与えられる非自明単純因子について，Nを2.3の命題の基数とし，MをD型に対してその命題と同じ方法で得られる基数とする。そしてmをその単純因子に同型なAにおける単純因子の個数とする。Aにおける自明単純因子を与えるKの分離拡大体LのK上のガロア閉包のすべてと非自明単純因子を与えるEのK上のガロア閉包のすべてがK上偶数次数であり，さらにそのようなFのK上のガロア閉包がすべてK上非巡回的なとき，その基数をCで表す。すると，もしAに非自明単純因子が存在しないならば，Cは2に等しい。もしAに非自明単純因子が存在し，それらがすべて同型ならば，CはM+m−1乗におけるm次の二項係数の2倍に等しい。さもなければ，CはN+m−1乗におけるm次の二項係数の，Aにおける非自明単純因子の同型類の代表系をすべてわたった積の2倍に等しい。そして，Aにおける単純因子を与えるKの分離拡大体が上の条件を満たさないとき，求める基数はC/2に等しい。

論文審査の結果の要旨

1950年代，I.M.ゲルファントらロシア学派によって，保型形式の表現論的研究が提唱され，R.D.ラングランズ，A.ヴェイユらの活動を通じてこのスタイルは世界的風潮となった。この潮流の中で，各局所体(実数体，複素数体，p進体等)上の代数群の無限次元表現論を研究することが，一つの主要な課題となったが，特殊な群以外については，今もってその解明が待たれている。

本論文は，そのような問題を究明するための足がかりとして，主に局所体上の古典群の極大トーラスの分類を確立したものである。通常，代数群の既約表現は，コンパクト群の場合等は古くから知られているが，極大トーラスの指標に対応して生じているという指導原理がある。従って，極大トーラスの分類は表現論において不可欠のものである。

本論文の手法は，極大トーラスの共役類の代表に対して，まず，そのトーラス自身が張る可換半純環のクラスを対応させ，そのような環のクラスを各群ごとに定めることから始める。これを遂行した後に，同じ環に対応するトーラスの共役類がどれだけあるかを決定する。このようにして，共役類の分類が完成するというストーリーである。

環の決定は，さほど困難ではないが，同じ環に対応するトーラスの共役類を調べるためには，ガロア・コホモロジーを具体的に表示して計算する必要があり，特殊直交群の場合等は，局所類体論を含めてかなり複雑な技術を用いて処理しなければならない。

この方針は，一貫した明晰さをもつもので，従って，特殊線型群や斜交群の場合は，全く一般の完全体の場合にも極大トーラスの共役類が決定されている。

本論文の結果は，この分野の今後の発展のために重要な足がかりとなるものであり，さらに，上述したように，その手法及び目的意識は高い研究能力と学識をもつことを示している。

よって刈山和俊提出の論文は理学博士の学位論文として合格と認める。